数理解析研究所講究録
501巻 1983年 118-135

Semi-free S^1-actions on homotopy spheres and higher dimensional knots

東大 理　桝田 幹也
(Mikiya Masuda)

§1 序

ホモトピー球面上の smooth S^1 作用を考える際、作用が「free」な場合と、「semi-free」な場合が、最も単純な場合と思われる。「free」の場合、S^1-orbit space を考えると、それは、ホモトピー複素射影空間になり、容易に、

"ホモトピー S^{2n+1} 上の free S^1 作用全体"
$$\updownarrow \ 1:1$$
"ホモトピー $\mathbb{C}P^n$ 全体"

であることがわかる。この事実に注目し、surgery理論を用いて、ホモトピー球面上の free S^1 作用が、(可算)無限にあることが示される([Hc])。しかし、残念ながら、この集合には、自然な群構造がない。したがって、(可算)無限にあるとしか言えないし、(中心的な位置にあると思われる)生成元は何かということも無意味な問題である。これに

反して、「semi-free」の場合には、固定点のまわりの equivariant connected sum により、自然に可換群の構造が入り、その構造や、生成元は何かということを論ずることが出来る。 この群の free part の rank については、すでに、Browder-Petrie[1]により完全な解答が与えられている。 ここでは、free part の生成元について、考えたい。

§2. 背景

以下、考える category は C^∞ で、manifold は断わらない限りすべて closed とし、次の記号を用いる。

- $X \simeq Y \Leftrightarrow X$ と Y はホモトピー同値
- $X \cong Y \Leftrightarrow X$ と Y は diffeo.
- ρ を X 上の群 G の作用としたとき、

  G-fixed point set を $F(\rho, X)$ 又は $F(G, X)$

  G-orbit space を X/ρ 又は X/G と表わす。

<u>定義</u>

$$\Sigma^n_q(S^1) \underset{\mathrm{def}}{=} \left\{ (\Sigma, \phi) \;\middle|\; \begin{array}{l} \Sigma \simeq S^n \quad (\Sigma : \text{oriented}) \\ \phi : \text{semi-free } S^1\text{-action on } \Sigma \\ \text{s.t. (i) } F(\phi, \Sigma) \simeq S^q \\ \text{(ii) (complex) normal bdle of } F(\phi, \Sigma) \text{ is trivial} \end{array} \right\}$$

注 ・ $n-q$ は正の偶数

・ $F(\phi,\Sigma)$ の normal bundle は S^1 作用により、自然に複素構造が入る。

・ 多くの場合 (ii) の条件は満たされている。(例えば、$n-q=2$ 又は 4 のとき、又は後述の例)。

上記の集合は、固定点のまわりの equivariant connected sum により可換群の構造をもつ。この群の free part の rank は、次で与えられる。

定理1 (Browder-Petrie [B-P]).

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} \Sigma^n_q(S^1) = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} H^{4*}(\mathbb{C}P^{s-1} \times (D^{q+1}, S^q); \mathbb{Z}) - \varepsilon$$

ただし、$2s = n-q$,

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{if } n \equiv 1 \pmod 4 \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

これより特に、(1) $n-q=2$ のとき、$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} \Sigma^n_q(S^1) = 0$ (実は、$\Sigma^n_q(S^1) = 0$ for $n \geqq 7$ W. Y. Hsiang [Hy]).

(2) $n-q=4$ のとき、

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} \Sigma^n_q(S^1) = \begin{cases} 1 & \text{if } q \equiv 3 \pmod 4 \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

この場合、$\Sigma_q^n(S^1)$ は codim 3 高次元 knot group と密接な関係がある。それを述べるために、次の定義をする。

定義:
$$\Sigma_q^m \underset{\text{def}}{=} \left\{ \text{oriented pair } (M,N) \;\middle|\; \begin{array}{l} M \simeq S^m \\ N \cong S^q \\ N \subset M \quad \text{submanifold} \end{array} \right\}$$

さらに、$M \cong S^m$ を要請した Σ_q^m の部分集合を、$\Sigma^{m,q}$ とかく。

これらの集合は、$m-q \geqq 3$ かつ $q \geqq 5$ のとき knot connected sum により、可換群になる。

注意1. $\Sigma_q^m \cong \Sigma^{m,q} \oplus \Theta^m$ 、ただし Θ^m はホモトピー S^m 全体のなす群(特に有限群)。

さて、(Σ, ϕ) を $\Sigma_q^n(S^1)$ の元とするとき、orbit space Σ/ϕ は、$m-q=4$ のとき、ホモトピー球面になることが、容易にわかる。したがって、pair $(\Sigma/\phi, F(\phi,\Sigma))$ は Σ_q^m の元を定める。

定理2 (Levine [L1] 1973) 上で述べた対応
$$\begin{array}{ccc} \Sigma_q^{q+4}(S^1) & \xrightarrow[\Psi]{\sim} & \Sigma_q^{q+3} \\ \psi & & \\ (\Sigma,\phi) & \longmapsto & (\Sigma/\phi, F(\phi\Sigma)) \end{array}$$
は同型

一方、knot group Σ_q^{8+3} は Levine [L2] により、ホモトピー群の言葉を用いて、ある exact sequence で表わされ（後述）、ある程度わかっている。例えば、

$$\Sigma_q^{8+3} = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \underset{(\text{finite})}{\text{torsion}} & \text{if } q \equiv 3 \pmod 4 \\ \underset{(\text{finite})}{\text{torsion}} & \text{その他} \end{cases}$$

である。この事実と、定理2より $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} \Sigma_q^{8+4}(S^1)$ が決定されるが、これは、Browder-Petrie により得られた前述のものと一致している。

㊟ $q=3$ のときには Haefliger により $\Sigma_3^6 \cong \mathbb{Z}$ (i.e. torsionなし) よって、$\Sigma_3^7(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

一方、最近 M. Davis は次の事を示した。

<u>定理3</u> (Davis [D] 1982) $\Sigma_3^7(S^1)$ の生成元は、S^4上の S^3-bundle として得られるあるホモトピー S^7 上の自然な semi-free S^1 作用である。

（具体的な構成については [D] を参照してください）。

$\Sigma_q^n(S^1)$ を torsion subgroup でわったものを $\hat{\Sigma}_q^n(S^1)$ と書くことにすると、Davisの定理の一般化として、自然に、

次の問題が考えられる。

$\boxed{\text{問題}}$　$\hat{\Sigma}^n_q(S^1)$ の生成元は何か。
特に $n-q=4$ のときはどうか。

<u>注意2.</u>　一般の n, q に対しては、"一般に" rank が1以上となるが、特に $n-q=4$ のときには、上でみたように

$$\hat{\Sigma}^n_q(S^1)=\begin{cases}\mathbb{Z} & \text{๚ } q\equiv 3\ (4)\\ 0 & \text{その他.}\end{cases}$$

§3. 例.

ホモトピー球面上の semi-free S^1 作用の例として、以下で述べる Brieskorn 上の S^1 作用が有名である。

$$N_\varepsilon := \{(u, v, z_1, \cdots, z_{2k}) \in \mathbb{C}^{2k+3} \mid u^3 + v^{6r-1} + z_1^2 + \cdots + z_{2k}^2 = \varepsilon\} \quad (\varepsilon\text{:十分小})$$

とおくとき、　$M^{4k-1}(r) \underset{\text{def}}{\equiv} N_\varepsilon \cap S^{4k+5}$ の diffeo. type は ε の取り方によらず、次の性質をもつ。

<u>事実</u>　bP^{4m} を 4m次元 parallelizable manifold を bound するホモトピー S^{4m-1} 全体とすると、$m \geqq 2$ のとき、有限巡回群で

(1) $M^{4m-1}(r) \in bP^{4m}$

(2) $M^{4m-1}(r) \cong S^{4m-1} \Longleftrightarrow b_m \mid r$　(b_m は bP^{4m} の位数)

この $M^{4k-1}(r)$ 上には 次の自然な semi-free S^1 作用がある。

$l<k$, $g=e^{i\theta}\in S^1$ とする。このとき 作用 Φ_l を

$$\Phi_l(g,z) \underset{def}{=} \left(\begin{array}{c|ccc} I_{2l+2} & & 0 & \\ \hline & D(\theta) & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & D(\theta) \end{array}\right)\begin{pmatrix} u \\ v \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{2k} \end{pmatrix}$$

と定義する。

ただし、 $I_{2l+2} = (2l+2)$ 次 単位行列

$$D(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

明らかに、 $F(\Phi_l, M^{4k-1}(r)) = M^{4l-1}(r) \underset{\uparrow}{\in} bP^{4l}$.

（$l\geqq 2$ が必要）

よく知られているように、固定点の complex normal bundle は trivial である。よって、$\Sigma^n_q(S^1)$ の定義 の (ii) の条件は満たされている。 従って、$(M^{4k-1}(r), \Phi_l)$ が $\Sigma^{4k-1}_{4l-1}(S^1)$ の元であるためには、固定点 $M^{4l-1}(r)$ が S^{4l-1} に diffeo. であることが、必要十分である。事実 の (2) より、

$$(M^{4k-1}(r), \Phi_l) \in \Sigma^{4k-1}_{4l-1}(S^1) \Longleftrightarrow b_l \mid r.$$

注意3. $W^{4k}(r) \underset{def}{=} N_\varepsilon \cap D^{4k+6}$ とすると、これ上にも、semi-free S^1 作用が、同様に定義される。それを $\tilde{\Phi}_l$ とかくと、

- $\partial(W^{4k}(r), \tilde{\Phi}_l) = (M^{4k-1}(r), \Phi_l)$

- $F(\tilde{\Phi}_\ell, W^{4k}(r)) = W^{4\ell}(r)$,
- $W^{4\ell}(r)$ の complex normal bundle は trivial.

§4. 結果

主定理　次のような homomorphism $\hat{\beta}$ がある。

$$\hat{\beta} : \Sigma^{4k-1}_{4\ell-1}(S^1) \longrightarrow \mathbb{Z} \quad \text{hom.}$$

s.t. $\hat{\beta}((M^{4k-1}(b_\ell), \Phi_\ell)) = a_\ell$ for $\ell \geq 2$ (up to sign)

ここで、

$$a_\ell = \begin{cases} 1 & \text{if } \ell \text{ is even,} \\ 2 & \text{if } \ell \text{ is odd.} \end{cases}$$

系1.　$k=\ell+1$, つまり codim 4 の場合、$(M^{4\ell+3}(b_\ell), \Phi_\ell)$ ($\ell \geq 2$) は、$\hat{\Sigma}^{4\ell+3}_{4\ell-1}(S^1)$ ($\cong \mathbb{Z}$) の

(i) 生成元　(ℓ が 偶数のとき)

(ii) 生成元 か 生成元の 2倍　(ℓが奇数のとき).

又、codim 4 の場合は、knot 群 $\Sigma^{4\ell+2, 4\ell-1}$ と関連があった。一方、この群 は、Levine [L2] により exact sequence

$$0 \to \mathbb{Z} \to \Sigma^{4\ell+2, 4\ell-1} \longrightarrow \ker \sigma_\ell \to 0$$

を用いて、表わされている。ここで、σ_ℓ は inclusion から導かれる自然な homomorphism $\pi_{4\ell-1}(G_3, SO_3) \to \pi_{4\ell-1}(G, SO)$.
しかし、この exact sequence が split しているかどうかについては、知られていないようである。我々の定理は、この splitting に関する情報を与えている

系2. Levine exact sequence $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha_\ell} \Sigma^{4\ell+2, 4\ell-1} \to \ker \sigma_\ell \to 0$ は、ℓ が偶数のとき、split.

<証> 注意1と定理2より、$\Sigma^{4\ell+3}_{4\ell-1}(S^1) \cong \Sigma^{4\ell+2, 4\ell-1} \oplus \Theta^{4\ell+2}$
$\hat{\beta}$ は、$\Sigma^{4\ell+3}_{4\ell-1}(S^1)$ から $\mathbb{Z}$ への homomorphism であるが、$\Theta^{4\ell+2}$ は有限群であるから、$\Sigma^{4\ell+2, 4\ell-1}$ から $\mathbb{Z}$ への homomorphism を導く。これも同じ記号 $\hat{\beta}$ で表わすと、α_ℓ と $\hat{\beta}$ の定義から、$\hat{\beta} \circ \alpha_\ell(1) = a_\ell$ がわかる。□

注 $\ell = 1$ のとき、上の exact sequence は split していない(実際 $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \to 0$ となる。). $\ell > 1$ なる奇数のとき、上の exact sequence が split するかどうかは、わからない。

§5、$\hat{\beta}$の定義の動機.

$\hat{\beta}$の定義の動機となった Montgomery－Yang の対応を、簡単に復習しよう。まず、

$$\Pi = \{\text{ホモトピー } \mathbb{C}P^3 \text{ 全体}\} \quad \text{とする。}$$

(実は、この集合は、和が定義できて、可換群になることが、[M-Y] により、知られている。) $X \in \Pi$ の元とするとき、$\gamma(X) \in \mathbb{Z}$ が次で定まる。

$$p_1(X) = (4 + 24\gamma(X))\, x^2.$$

ここで、$p_1(X)$ は X の first Pontrjagin class で x は、$H^2(X;\mathbb{Z})$ の生成元。

<u>定理4</u> (Montgomery－Yang, Wall, ----)

$$\Sigma^7_3(S^1) \xrightarrow{\Phi} \Sigma^6_3 = \Sigma^{6,3} \xrightarrow{K} \Pi \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z}$$

はすべて、isomorphism.

この定理は、我々にいくつかのことを教えてくれる。例えば、

(I) $\Sigma^7_3(S^1)$ (又は $\Sigma^{6,3}$) を研究することと、Π を研究することは同じ。

(II) γ, 本質的に Π の (first) Pontrjagin class, は、$\Sigma^7_3(S^1)$ の invariant である。

これら2つの事実は、高次元の場合でもだいたい成立する。それを説明する前に、上の対応をもう少し詳しく見よう。

まず、Ψ は定理2で与えられたもの。つまり、orbit space をとる対応。K は knot のまわりで、適当な framing を取って、surgery する対応。この順序は、入れかえてもよい。つまり、まず (equivariant) surgery をして、次に orbit space をとっても、同じことである。

$\tilde{S}^{2n-1}$, $\tilde{D}^{2n}$ を $\mathbb{C}^n$ の単位球面，単位球で，複素数をかけるという S^1 作用をもったものとすると，$\Sigma \in \Sigma^7_3(S^1)$ は，

$$\Sigma = D^4\times\tilde{S}^3 \underset{f}{\cup} S^3\times\tilde{D}^4 \qquad \text{と分解する。}$$

ここで，$f: S^3\times\tilde{S}^3 \longrightarrow S^3\times\tilde{S}^3$ equivariant diffeo. で，$S^3\times\{0\} = F(\Phi,\Sigma)$. 今，注意した様に，合成 $K\circ\Psi$ は，次の様に記述できる。

$$\begin{array}{ll}
 & \Sigma = D^4\times\tilde{S}^3 \underset{f}{\cup} S^3\times\tilde{D}^4 \\
 & \qquad\qquad \downarrow \ \text{equivariant surgery} \\
K\circ\Psi & \tilde{\Sigma} = D^4\times\tilde{S}^3 \underset{f}{\cup} D^4\times\tilde{S}^3 \\
 & \qquad\qquad \downarrow \ \text{orbit space} \\
 & \tilde{\Sigma}/S^1 = D^4\times S^2 \underset{f'}{\cup} D^4\times S^2 \qquad \in \Pi.
\end{array}$$

さて、高次元の場合をみよう。$\Sigma\in\Sigma^n_q(S^1)$ $(n-q=2s)$ とすると、

$$\Sigma = D^{q+1} \times \tilde{S}^{2s-1} \underset{f}{\cup} S^{q} \times \tilde{D}^{2s} \qquad \text{と分解する。}$$

$$\downarrow \text{ equivariant surgery}$$

$$\tilde{\Sigma} = D^{q+1} \times \tilde{S}^{2s-1} \underset{f}{\cup} D^{q+1} \times \tilde{S}^{2s-1}$$

$$\downarrow \text{ orbit space.}$$

$$\tilde{\Sigma}/S^1 = D^{q+1} \times \mathbb{C}P^{s-1} \underset{f'}{\cup} D^{q+1} \times \mathbb{C}P^{s-1}$$

高次元の場合. Σ に $\tilde{\Sigma}/S^1$ を対応させる対応は. 全単射とは言えないが. ある意味で"ほとんど全単射"であることがわかる。これは、(I)の事実に対応している。したがって、$\tilde{\Sigma}/S^1$ の Pontrjagin class たちが、$\Sigma^n_q(S^1)$の invariant を与えることが予想される。実際. Pontrjagin class を用いて、$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} H^{4*}(\mathbb{C}P^{s-1} \times (D^{q+1}, S^q); \mathbb{Z})$ の分. $\Sigma^n_q(S^1)$ から $\mathbb{Z}$ への homomorphism が定義でき. Signature theorem から. 多くとも、このうち独立なものは. $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} H^{4*}(\mathbb{C}P^{s-1} \times (D^{q+1}, S^q); \mathbb{Z}) - \varepsilon$ 個であることがわかり。これらが実際 独立であることは Surgery 理論を使って示せる。

§6. $\hat{\rho}$ の定義.

簡単のため. $\Sigma^{4l+3}_{4l-1}(S^1)$ (codim 4) で $l \geqq 2$ の場合

のみ扱う。 $(\Sigma, \phi) \in \Sigma^{4l+3}_{4l-1}(S^1)$ に対し、固定点集合のまわりの equivariant embedding $h: S^{4l-1} \times \tilde{D}^4 \longrightarrow \Sigma$ を一つ選ぶ。これを用いて、前節で述べた対応により $\tilde{\Sigma}/S^1$ を得る。次の補題は Mayer-Vietoris exact seq. よりすぐ従う。

<u>補題1.</u> $l \geqq 2$ のとき $H^*(\tilde{\Sigma}/S^1) \cong H^*(S^{4l} \times S^2)$.

<u>定義</u> $l \geqq 2$ のとき、

$$\beta((\Sigma, \phi)) \underset{def}{=} x \cup p_l(\tilde{\Sigma}/S^1)\,[\tilde{\Sigma}/S^1] \in \mathbb{Z}$$

ただし、x は $H^2(\tilde{\Sigma}/S^1; \mathbb{Z})$ の生成元。

㊟ 正確には、生成元 x の取り方には、符号のあいまいさがある。それを除くには、向きのことを考慮に入れる必要がある。

<u>補題2.</u> (1) β の値は h の取り方によらない。

(2) $\beta: \Sigma^{4l+3}_{4l-1}(S^1) \longrightarrow \mathbb{Z}$ は homomorphism

<証> 略 □

一般に β が全射であることは期待できない。

実際、次のことが示せる。

<u>補題3.</u> βの値は $(2l-1)!\,a_l \times \left(\dfrac{B_l a_l}{4l}\text{の分母}\right)$ $(=d_l\text{とおく})$ で割れる。 ここで B_l は l番目のBernoulli数.

〈証〉 θ_l を $\tilde{\Sigma}/S^1$ のtangent bundleにassociateした principal $SO(4l+2)$ bundle の $H^{4l}(\tilde{\Sigma}/S^1;\mathbb{Z})$ に値をもつ obstruction class とすると. Kervaire [K] より.

$$P_l(\tilde{\Sigma}/S^1) = (2l-1)!\,a_l\,\theta_l \qquad \text{—①}$$

一方. Atiyah-Hirzebruch-Singer より

$$\mathbb{Z} \ni e^{x} \cup \hat{\mathfrak{a}}(\tilde{\Sigma}/S^1)\,[\tilde{\Sigma}/S^1] \qquad (\hat{\mathfrak{a}}(\ )\text{は}\hat{\mathfrak{a}}\text{-class})$$

$$= -\frac{B_l}{2\times(2l)!}\,x \cup P_l(\tilde{\Sigma}/S^1)\,[\tilde{\Sigma}/S^1]$$

$$= -\frac{B_l a_l}{4l}\,x \cup \theta_l\,[\tilde{\Sigma}/S^1]$$

$\therefore$ $x \cup \theta_l[\tilde{\Sigma}/S^1]$ は $\dfrac{B_l a_l}{4l}$ の分母で割れる —②

① ② より補題を得る。 □

この補題より

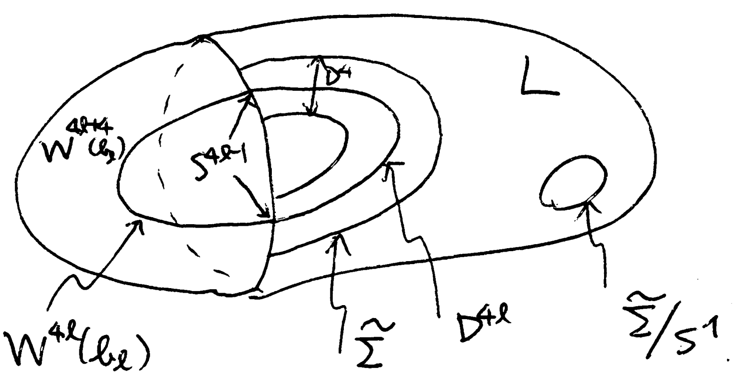
<u>定義</u> $\hat{\beta}((\Sigma,\phi)) \underset{def}{=} \dfrac{\beta((\Sigma,\phi))}{d_l} \in \mathbb{Z}$
(d_lは補題3のもの).

§7. 定理の証明.

$k=l+1$ の場合だけ示す。 まず $(M^{4l+3}(r), \Phi_l) = \partial(W^{4l+4}(r), \tilde{\Phi}_l)$ であった(§3 注意3). 我々の関心は $r=b_l$ のときである。簡単のため $M^{4l+3}(b_l)$ を Σ, 作用 Φ_l を Φ と略記する。計算したいのは 値 $\beta((\Sigma, \Phi)) = x^l p_l(\tilde{\Sigma}/S^1)\,[\tilde{\Sigma}/S^1]$. そのために次のような closed S^1-manifold X を考える。

L : $\tilde{\Sigma} \xrightarrow[S^1]{} \tilde{\Sigma}/S^1$ に associate した D^2-bundle の total space とする。

$W^{4l+4}(b_l)$ の boundary $M^{4l+3}(b_l)$ の固定点は standard な S^{4l-1} であるから、これに沿って handle $D^{4l}\times\tilde{D}^4$ を equivariant にはりつけることが出来る。これによって出来た S^1 manifold N の boundary が、まさに $\tilde{\Sigma}$ であることに注意されたい。従って N と L をそれぞれの境界に沿ってはりつけることが出来る。これが、求める X である。つまり、$X = W^{4l+4}(b_l) \cup D^{4l}\times\tilde{D}^4 \cup L$

$X =$ 

X は $(4l+4)$ 次元 closed S^1 manifold で、作用は semi-free, 固定点は $W^{4l}(b_l) \cup D^{4l}$ ($=F$ とおく) と $\tilde{\Sigma}/S^1$ の 2つの連結成分からなる。

さて、F の complex normal bundle が trivial であることに注意して、G-signature theorem を用いると、

$$\operatorname{Sign} X = \mathcal{L}(F)\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^2[F] + \mathcal{L}(\tilde{\Sigma}/S^1)\left(\frac{te^{2x}+1}{te^{2x}-1}\right)[\tilde{\Sigma}/S^1]$$

ただし、

t は標準的な複素1次元の S^1-module,

$\mathcal{L}(\ )$ は Hirzebruch の $\mathcal{L}$-class.

これに、

$$\begin{cases} \operatorname{Sign} F = \operatorname{Sign} W^{4l}(b_l) + \operatorname{Sign} D^{4l} = 8b_l \\ \mathcal{L}(\tilde{\Sigma}/S^1) = 1 + c_l p_l(\tilde{\Sigma}/S^1) \qquad (c_l = 2^{2l}(2^{2l}-1)B_l/(2l)!) \end{cases}$$

を代入すると、

$$\operatorname{Sign} X = 8b_l\left(\frac{t+1}{t-1}\right)^2 + (1 + c_l p_l(\tilde{\Sigma}/S^1))\left(\frac{te^{2x}+1}{te^{2x}-1}\right)[\tilde{\Sigma}/S^1].$$

$\operatorname{Sign} X$ は定義より、定数であるから、右辺は $t=1$ の pole を持ってはならない。従って簡単な計算より

$$x \cup p_l(\tilde{\Sigma}/S^1)[\tilde{\Sigma}/S^1] = \frac{8b_l}{c_l}$$ でなければならない。

$$\therefore\ \hat{\beta}((\Sigma,\phi)) = \frac{\beta((\Sigma,\phi))}{d_l} = \frac{8b_l}{c_l d_l}.$$

これに、

$$\begin{cases} b_\ell = 2^{2\ell-2}(2^{2\ell-1}-1) & \left(\dfrac{4B_\ell}{\ell}\text{ の分子}\right) \\ c_\ell = 2^{2\ell}(2^{2\ell-1}-1)\,\dfrac{B_\ell}{(2\ell)!} & \\ d_\ell = (2\ell-1)!\,a_\ell & \left(\dfrac{B_\ell a_\ell}{4\ell}\text{ の分母}\right) \end{cases}$$

を代入すると

$$\hat{\beta}((\Sigma,\varphi)) = a_\ell$$

これは、我々の定理を示している。 □

参考文献

[Hc] W.C. Hsiang, A note on free differentiable actions of S^1 and S^3 on homotopy spheres, Ann. of Math. 83 (1966)

[B-P] Browder-Petrie, Diffeomorphisms of manifolds and semifree actions on homotopy spheres, Bull. of A.M.S. 77 (1971).

[HY] W.Y. Hsiang, On the unknottedness of the fixed point set of differentiable circle group actions on spheres — P.A. Smith conjecture, Bull. of A.M.S. 70 (1964).

[L_1] Levine, Semi-free circle actions on spheres, Invent. Math. 22 (1973).

[L_2] ——, A classification of differentiable knots, Ann. of Math. 82 (1965).

[D] M. Davis, Some group actions on homotopy spheres of dimension seven and fifteen, Amer. J. Math 104 (1982).

[M-Y] Montgomery-Yang, Differentiable actions on homotopy seven spheres, Trans. A.M.S. 122 (1966)

[K] Kervaire, A note on obstructions and characteristic classes, Amer. J. Math. 81 (1959).